E.N.S. FONTENAY & SAINT-CLOUD 1979

Option "Sciences naturelles"

MATHEMATIQUES

DURÉE : 3 heures

Les parties I *et* II *sont indépendantes*

I

On considère une suite chronologique d'expériences aléatoires :

$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$ Chaque expérience n'admet que deux résultats possibles, mutuellement incompatibles : l'événement A, de probabilité p, ou l'événement B, de probabilité q.

Les réalisations successives sont indépendantes.

1° Soit U la variable aléatoire associant à la suite d'expériences le rang du premier événement A.

a. Déterminer la loi de probabilité de U.

b. Calculer l'espérance et la variance de U.

2° Le nombre d'expériences qui peuvent se réaliser pendant un intervalle de temps t obéit à une loi de Poisson de paramètre αt.

a. Calculer la probabilité pour que, pendant le temps t, le premier événement A se produise lors de la dernière expérience.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable V qui associe à t, le nombre d'événements A qu'on peut observer dans l'intervalle de temps t.

3° On admet le modèle suivant :

A chaque expérience, on associe deux variables aléatoires X et Y, et, si Z est la variable Y − X, l'événement A est l'événement « $Z \leqslant 0$ » ; les variables X et Y sont indépendantes et ont pour densités de probabilité respectives :

$$g : \begin{cases} x \longmapsto 0, & \text{si } x < 0 \\ x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad h : \begin{cases} y \longmapsto 0, & \text{si } y < 0 \\ y \longmapsto \mu e^{-\mu y}, & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

où λ et μ sont deux paramètres réels strictement positifs.

a. Calculer l'espérance et la variance de Z.

b. Calculer, en fonction de λ et μ, la probabilité p de l'événement A.

.../...

4° Soit la variable W qui associe aux dix premières expériences le nombre d'événements A.

a. Déterminer, en fonction de p, la loi de probabilité de W.

b. Deux conditions expérimentales peuvent se présenter :

$H_1 : \mu = \lambda$ pour toute la suite d'expériences

$H_2 : \mu = 9\lambda$ pour toute la suite d'expériences

avec pour probabilités respectives 2/3 pour H_1, 1/3 pour H_2.

Sur les dix premières expériences, on observe deux fois l'événement A; calculer numériquement la probabilité pour que l'on soit dans la condition H_1.

II

● Soit Ω une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si f et g sont deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$, on note $f.g$ l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \longmapsto f(x, y).g(x, y).$$

● Pour toute application f de Ω dans $\mathbb{R}$ admettant en tout point de Ω des dérivées partielles premières f'_x et f'_y et secondes f''_{xx} et f''_{yy}, on note Δf, l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \longmapsto f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y).$$

● On notera φ l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

1° Soit $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. On suppose que Ω est tel que :

$$(x, y) \in \Omega \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in \Omega, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

On note $\mathcal{H}^k$, $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble des applications f de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$(1) \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y), \qquad \forall (x, y) \in \Omega, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

a. Montrer que si $f \in \mathcal{H}^k$ est différentiable, l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\lambda \longmapsto f(\lambda x, \lambda y)$ est dérivable et qu'est vérifiée la relation :

$$(2) \qquad x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y) = k f(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \Omega.$$

b. Montrer que si $f \in \mathcal{H}^k$ est différentiable et admet des dérivées secondes, on a :

$$(3) \qquad \Delta(\varphi . f) - \varphi . \Delta f = 4(k + 1) f.$$

c. Vérifier la relation (3), en précisant Ω dans chacun des cas, pour les applications :

$$(x, y) \longmapsto \operatorname{Log} \frac{x}{y}; \quad (x, y) \longmapsto \frac{1}{xy}.$$

2° $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de Ω dans $\mathbb{R}$ est muni de la structure d'espace vectoriel habituelle sur $\mathbb{R}$.

Si $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on note Ψ_{ij}, l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \longmapsto x^i y^j.$$

$\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des polynômes à deux variables réelles x et y, c'est-à-dire que P est un élément de $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe une partie finie J de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que :

$$P = \sum_{(i,j) \in J} a_{ij} \Psi_{ij} \quad \text{avec les } a_{ij} \text{ réels.}$$

a. Montrer que pour toute partie finie J de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, le système des vecteurs $(\Psi_{ij})_{(i,j) \in J}$ de $\mathcal{F}$ est libre et que $\Psi_{ij} \in \mathcal{H}^{i+j}$.

b. On note $E_k = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}^k$. Montrer que E_k est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$, réduit à la fonction nulle si $k \notin \mathbb{N}$.

On suppose dans la suite que $k \in \mathbb{N}$; montrer que E_k est alors engendré par les vecteurs $(\psi_{ij})_{i+j=k}$. Quelle est sa dimension?

c. Montrer que si $f \in E_k$, $\Delta(\varphi . f) \in E_k$, $\varphi . \Delta f \in E_k$.

On note respectivement F_k et G_k les applications de E_k dans lui-même définies par :

$$F_k(f) = \Delta(\varphi . f); \quad G_k(f) = \varphi . (\Delta f).$$

Montrer que F_k et G_k sont des endomorphismes de E_k vérifiant la relation :

$$(4) \qquad F_k - G_k = 4(k + 1).I_k \quad \text{où } I_k \text{ désigne l'application identique de } E_k.$$

d. Calculer les valeurs propres de F_0, F_1 et F_2. Montrer que F_k et G_k ont les mêmes vecteurs propres.

Si λ est une valeur propre de F_k, f un vecteur propre associé, alors f est un vecteur propre de G_k associé à une valeur propre μ. Quelle relation y a-t-il entre λ et μ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail